САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

МИСОВ Трифон Иванов

СЛУЧАЙНЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2008

Работа выполнена на кафедре статистического моделирования математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор ЕРМАКОВ Сергей Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор СЕДУНОВ Евгений Витальевич

кандидат физико-математических наук, доцент БУРЕ Владимир Мансурович

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Защита состоится «__» ____________ 200_ г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 212.232.51 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 28, математико-механический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Автореферат разослан «__» ____________ 200__г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Мартыненко Б.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Задачи оценивания интегралов методом Монте-Карло, разделения ошибок в регрессионном анализе и построения точных D-оптимальных планов имеют важное прикладное значение. Умение считать эффективно многомерные интегралы помогает в ряде задач любого раздела математики, а выделение систематической погрешности от случайной позволяет оценить с большой точностью качество регрессии. Наибольший интерес представляет третья задача, решение которой известно лишь в ряде частных, причем одномерных, случаев. Введенные Кифером и Вольфовицем непрерывные планы экспримента, для которых разработана солидная теория, служат лишь приближениями точных и не отражают ряд свойств расположения точек D-оптимального плана. Поэтому построение эффективных вычислительных процедур приближенного нахождения точных D-оптимальных планов позволит решать более широкий клас задач D-оптимизации, причем в областях большой размерности.

Цель диссертационной работы. Целью работы является разработка эффективных алгоритмов моделирования распределения Δ^2, а также разработка и практическая реализация алгоритмов нахождения точных D-оптимальных планов с его помощью.

Задачи диссертационного исследования.

– составление алгоритма эффективного моделирования распределения Δ^2 во всех его разновидностях (непрерывной, дискретной, обобщенной) и оценка его трудоемкости

– исследование вопроса о нахождении точных D-оптимальных планов как задача случайного поиска экстремума функции многих переменных, используя обобщенное распределение Δ^2; сравнение с равномерным случайным поиском

– иллюстрация полученных результатов на содержательных примерах

Общая методология исследования. При моделировании распределения Δ^2 применялись методы обращения, отбора и композиции, а при D-оптимизации использовалась новая модификация метода случайного поиска.

Научная новизна. Удалось построить алгоритм эффективного моделирования распределения Δ^2 в самых общих предположениях. Проведен сравнительный анализ его трудоемкости по сравнению с методами, которые до этого применялись, а именно методом отбора в непрерывном случае и методом обращения в дискретном. Моделирование обобщенного распределения Δ^2, а также нахождение точных D-оптимальных планов с его помощью рассматриваются впервые. В частности, впервые найден D-оптимальный план для квадратичной регрессии в единичном двумерном гиперкубе.

Практическая ценность. Разработанные алгоритмы моделирования трех вариантов распределения Δ^2 реализованы в виде программ, что позволяет решать задачи оценивания интегралов, разделения погрешностей и построения точных D-оптимальных планов в ряде частных случаев.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Постановки задач оценивания интегралов, разделения ошибок в регрессионном анализе и построения точных D-оптимальных планов и их решения с помощью распределения Δ^2.

2. Моделирование распределения Δ^2 в абсолютно непрерывном случае, оценка его трудоемкости и сравнение с методом отбора. Моделирование дискретного распределения Δ^2, оценка его трудоемкости и сопоставление с методами обращения и отбора. Моделирование обобщенного распределения Δ^2 и оценка его сложности.

3. Алгоритмическая схема нахождения точного D-оптимального плана с помощью распределения Δ^2. Оценка приближения построенного решения к истинному.

4. Примеры приложения трех вариантов распределения Δ^2: абсолютно непрерывного – в задаче оценивания интегралов, дискретного – в задаче разделения ошибок, обобщенного – в задаче нахождения точных D-оптимальных планов

Аппробация работы. Результаты работы обсуждались на семинарах кафедры статистического моделирования Санкт-Петербургского государственного университета. Основные результаты докладывались на конференции "5th St. Petersburg Workshop on Simulation"в 2005г., Санкт-Петербург.

Публикация результатов. Результаты исследований отражены в работах 1. – 4. В статье 1. соискателю принадлежит лемма 2 о структуре условных плотностей дискретного Δ^2-распределения и теорема 1 о трудоемкости моделирования с помощью метода предложенного авторами, чистого метода обращения и чистого метода отбора. В статье 2. соискателю принадлежат лемма 2.2 и следствие 2.1, выявляющие структуру условных плотностей непрерывного Δ^2-распределения, лемма 4.2, указывающая способ итеративного нахождения коэффициентов смеси, в виде которой представляются условные плотности, а также лемма 4.1 и теорема 4.1, в которых сосчитаны трудоемкости моделирования с помощью метода предложенного авторами и чистого метода отбора. В статье 3. соискателю принадлежит теорема 1 о моделировании Δ^2-распределения, а также примеры 1, 2 и 3 об оценивании интегралов с помощью случайных кубатурных формул. Остальные результаты в статьях 1., 2. и 3. принадлежат соавтору. Статья 2. опубликована в журнале, входящем в перечень ВАК на момент публикации.

Структура и объем работы. Работа содержит 98 страниц, состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 26 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 содержит постановки задач оценивания интегралов методом Монте-Карло, разделения ошибок в регрессионном анализе и построения точных D-оптимальных планов, а также их известные решения. В §1 рассматривается приближенное вычисление интегралов с помощью случайных интерполяционно-кубатурных формул (СИКФ). На s-мерном множестве X с σ-конечной мерой μ задается набор линейно независимых функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, для которых ставится условие точности СИКФ. Не уменьшая общности, можно в дальнейшем считать $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ортонормированными в $L^2(X, \mu)$. Далее, выбирая n точек $x_1, \ldots, x_n \in X$ согласно непрерывному распределению Δ^2, имеющему плотность

$$\Delta^2(Q) = \frac{1}{n!} \left(\det ||\varphi_j(x_i)||_{i,j=1}^{n}\right)^2, \qquad Q = (x_1, \ldots, x_n),$$

построенная этим способом СИКФ является несмещенной оценкой исследуемого интеграла с известной дисперсией.

В §2 обсуждается задача о разделении ошибок в регрессионном анализе. Рассматривается s-мерное множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ с заданной равномерной мерой μ и стандартная линейная регрессионная модель порядка m:

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x_j) + \varepsilon_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ортонормированы в X и $E\varepsilon_i = 0, E\varepsilon_i^2 = \sigma^2, cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$. Параметры модели c_i оцениваются с помощью метода наименьших квадратов, а разделение систематической ошибки от случайной производится с помощью рандомизации этих оценок (т.е. процедуры типа ресемплинг): в точках $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ вводится дискретное распределение Δ^2 с плотностью

$$p(i_1, \ldots, i_m) = \frac{\Delta^2(i_1, \ldots, i_m)}{\sum\limits_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} \Delta^2(i_1, \ldots, i_m)},$$

где

$$\Delta(i_1, \ldots, i_m) = \det ||\varphi_j(x_{i_k})||_{j,k=1}^{m}$$

и строятся случайные величины

$$\chi_i = \chi_i(i_1, \ldots, i_m) = \frac{\Delta_i(\xi, i_1, \ldots, i_m)}{\Delta(i_1, \ldots, i_m)},$$

с математическим ожиданием, равным соответствующей оценке МНК $\widehat{c_i}$. Исследуя дисперсию χ_i в зависимости от количества промоделированных наборов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ и числа измерений, проведенных в каждом из них, удается разделить систематическую погрешность от случайной.

В §3 рассматривается задача нахождения точного D-оптимального плана в стандартной линейной регрессионной модели порядка m с $n > m$

измерениями (1). Множество планирования X, как и ранее, s-мерно, на нем задана мера Лебега μ, а набор функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, не уменьшая общности, считается ортонормированным. В этой работе предлагается новый подход, основанный на проведении случайного поиска в области планирования с помощью обобщенного распределения Δ^2, имеющего плотность

$$\Delta^2_{n,m}(Q) = \frac{(n-m)!}{n!} \det \left(||\varphi_i(x_1), \ldots, \varphi_i(x_n)||_{i=1}^m \cdot ||\varphi_1(x_j), \ldots, \varphi_m(x_j)||_{j=1}^n \right),$$

где c – константа нормировки. Обоснованием такого поиска служит тот факт, что плотность $\Delta^2_{N,m}(Q)$ равна, с точностью до постоянной, определителю информационной матрицы плана эксперимента. Поскольку последний при D-оптимизации максимизируется, задача сводится к нахождению аргумента максимума $\Delta^2_{N,m}(Q)$ для выборки из генералной совокупности с обобщенным Δ^2-распределением.

В силу того, что распределение Δ^2 многомерно и зависит от выбора ортонормированной системы функций, его моделирование представляло трудность, в результате которой задачи оценивания интегралов и разделения ошибок исследовались на практике только при очень сильных предположениях относительно множества X и набора $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Задача нахождения точных D-оптимальных планов в связи с Δ^2 не исследовалась. Поэтому основной целью этой работы является построение, в самых общих предположениях, эффективного алгоритма моделирования распределения Δ^2 в трех его вариантах с целью практического решения указанных задач в ряде частных случаев.

Глава 2 посвящена построению алгоритма моделирования распределения Δ^2 в абсолютно непрерывном случае, причем оценивается его трудоемкость и приводятся примеры его применения в задаче вычисления интегралов. Не уменьшая общности, будем считать, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ образуют ортонормированную систему в $L^2(X, \mu)$, а μ – мера Лебега или эквивалентная ей. В §1 обращается внимание моделированию чистым методом отбора, который предлагался до недавнего времени в литературе как единственный возможный в этой ситуации. В §2 его трудоемкость оценена следующей теоремой:

Теорема 1 *Для трудоемкости C_r моделирования распределения* Δ^2

методом отбора имеет место неравенство

$$C_r \leq \left(\frac{2n^3+n+3}{3}+cn^2\right)\frac{n^n\left(\max\limits_{x\in X,\, i=1,\dots,n}|\varphi_i(x)|\right)^{2n}}{n!},$$

где c – средняя сложность однократного вычисления функции φ_i, $i=\overline{1,n}$ в любой точке $x\in X$. Более того, если $\varphi_i(x)\neq 0$ $\forall x\in X$, $i=\overline{1,n}$, верхнее неравенство превращается в равенство с вероятностью 1.

В §3 изложен алгоритм моделирования, основанный на представлении $\Delta^2(Q)$ в виде произведения условных плотностей. Таким образом, мы сводим задачу моделирования случайного вектора, возможно, большой размерности, к задаче моделирования случайной величины и, более того, именно структура условных плотностей дает возможность упростить процесс.

Теорема 2 *Условная плотность k-ого порядка $p_k(x_k|x_1x_2\dots x_{k-1})$ представима в виде*

$$\sum_{1\leq i_1<\dots,i_k\leq n}\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\left(c^{(k)}_{\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\setminus\{i_j\}}\right)^2}{(n-k+1)\sum\limits_{1\leq j_1<\dots,j_{k-1}\leq n}\left(c^{(k)}_{j_1j_2\dots j_{k-1}}\right)^2}\frac{\left(\sum\limits_{m=1}^{k}(-1)^{m+1}c^{(k)}_{\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\setminus\{i_m\}}\varphi_{i_m}(x_k)\right)^2}{\sum\limits_{j=1}^{k}\left(c^{(k)}_{\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\setminus\{i_j\}}\right)^2},$$

где

$$c^{(k)}_{\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\setminus\{i_j\}}=\sum_{s=1,s\neq j}^{k}(-1)^{s+1}c^{(k-1)}_{\{i_1,\dots,i_k\}\setminus\{i_j,i_s\}}\varphi_{i_s}(x_{k-1}) \qquad (2)$$

Теорема утверждает, что условная плотность k-ого порядка представима в виде смеси распределений, причем плотность каждого из них является квадратом определителя k-ого порядка. Если разложить его по строке, содержащей моделируемую случайную величину, то оказывается, что коэффициенты этой линейной комбинации считаются итеративно – через те же самые коэффициенты, присутствующие в представлении условной плотности $(k-1)$-ого порядка. Это позволяет заметно уменьшить трудоемкость, не требуя прямого вычисления определителя k-ого порядка, а лишь простого пересчета коэффициентов. Тем самым любую плотность в смеси можно моделировать эффективно методом отбора. Процедура моделирования полностью изложена в §4 и имеет вид:

Алгоритм 1 Моделирование Δ^2-распределения

Для $k = \overline{1, n}$:

1. Пересчитываем коэффициенты $c^{(k)}_{i_1,\ldots,i_{k-1}}$ согласно (2).
2. Моделируем дискретное распределение, определяющее смесь.
3. Выбрав однозначно набор $i_1, \ldots, i_k$, моделируем методом отбора то распределение в смеси, которое соответствует этим индексам. Таким образом, мы промоделировали x_k.

В том же §4 оценена трудоемкость Алгоритма 1:

Теорема 3 *Трудоемкость моделирования Δ^2-распределения предложенным в Алгоритме 1 методом равна*

$$C = \left(\frac{c+2}{2} n^2 - \frac{c+8}{2} n - 3 + (n+4)2^{n-1} + \log_2 \prod_{k=2}^{n-1} C_n^k \right) C_\varphi^{(n)}$$

В §5 проведено сравнение трудоемкостей Алгоритма 1 и чистого отбора, которое проиллюстрировано в §6 на примере оценивания однократного, двукратного и пятикратного интегралов от нормальной плотности по разным областям. При моделировании использованы сначала случайные, а затем и квазислучайные точки, чтобы улучшить скорость сходимости. Также показано, что с ростом размерности n моделируемого вектора эффективность Алгоритма 1 по сравнению с отбором возрастает заметно, что отражено в следующей таблице:

Глава 3 посвящена построению алгоритма моделирования распределения Δ^2 в дискретном случае, причем оценивается его трудоемкость и приводятся примеры его применения в задаче разделения погрешностей в регрессионном анализе. В §1 и §2 приводятся схемы

n	C/R Ratio
2	$0,375$
3	$0,427$
4	$0,129$
5	$0,066$
6	$0,035$
7	$0,019$
8	$0,011$
9	$7,1.10^{-3}$
10	$3,9.10^{-4}$
20	$5,6.10^{-5}$
50	$1,26.10^{-9}$

Таблица 1: Сравнение трудоемкостей метода условных плотностей и метода отбора

моделирования с помощью чистых методов обращения и отбора, соответственно, причем оценены трудоемкости этих процедур.

Теорема 4 *Трудоемкость моделирования Δ^2-распределения относительно дискретной меры μ^n методом обращения не превосходит*

$$C_{inv} = \left(n - 1 + nNC_\varphi + C_N^n \frac{2n^3+n+6}{3}\right) + \log_2 C_N^n,$$

где C_φ - средняя трудоемкость моделирования любой из функций φ_i в какой би ни было точке x_j, $i,j = \overline{1,n}$.

Теорема 5 *Трудоемкость моделирования Δ^2-распределения относительно дискретной меры μ^n методом отбора не превосходит*

$$C_{rej} = n^n (MAX)^{2n} \left(\frac{2n^3+n+3}{3} + n^2 C_\varphi + 2\frac{N^n (N-n)!}{N!} + \log_2 n\right),$$

где $MAX = \max\limits_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,N}} |\varphi_i(x_j)|$, а C_φ - средняя трудоемкость моделирования любой из функций φ_i в какой би ни было точке x_j, $i,j = \overline{1,n}$.

В §3 обсуждается модификация Алгоритма 1 в случае дискретного варианта Δ^2. Оказывается, что условные плотности имеют аналогичную структуру, позволяющую пересчитывать коэффициенты смесей и миноры определителей итеративно. Сложность моделирования в этом случае не превосходит

$$C_{cond} = M^2 \left(\frac{C_\varphi+2}{2} n^2 - \frac{C_\varphi+8}{2} n - 3 + (n+4)2^{n-1} + \log_2 \prod_{k=2}^{n-1} C_n^k + \log_2 C_N^n \right),$$

где, $M = \max_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,N}} |\varphi_i(x_j)|$, а C_φ - средняя трудоемкость моделирования любой из функций φ_i в какой би ни было точке x_j, $i, j = \overline{1,n}$. В §4 проведен сравнительный анализ целесообразности применения методов обращения, отбора и условных плотностей в зависимости от параметров модели n и N, а также от количества промоделированных векторов R.

В заключительном §5 Главы 2 приведены примеры на разделения ошибок в одномерных и двумерных областях как при активном, так и при пассивном проведении эксперимента.

Глава 4 посвящена построению алгоритма моделирования обобщенного распределения Δ^2, причем оценивается его трудоемкость и приводятся примеры его применения в задаче построения точных D-оптимальных планов. В §1 вводится плотность обобщенного распределения Δ^2:

$$\Delta^2_{n,m}(Q) = p_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{(n-m)!}{n!} \det \left|\left| \sum_{i=1}^{n} \varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i) \right|\right|_{k,l=1}^{m}, \qquad (3)$$

и выводится явный вид соответствующих условных плотностей.

Теорема 6 *Пусть функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L^2(X, \mu)$, где X – измеримое множество, а μ – мера Лебега. Обозначим*

$$p_{n-k}(x_1, \ldots, x_{n-k}) = \int\limits_X p_n(x_1, \ldots, x_n) dx_{n-k+1} \ldots dx_n,$$

где $p_n(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вид (3). Тогда

$$p_{n-k}(x_1, \ldots, x_{n-k}) = \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{l=a_k}^{b_k} C_k^{b_k-l} \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_l \le n-k \\ 1 \le j_1 < \ldots < j_l \le m}} \left(\det \left|\left| \varphi_{j_p}(x_{i_q}) \right|\right|_{p,q=1}^{l} \right)^2, \quad (4)$$

где $a_k = \max\{0, m-k\}$, $b_k = \min\{m, n-k\}$, *а под* $\left(\det \left|\left|\varphi_{j_p}(x_{i_q})\right|\right|_{p,q=1}^{l}\right)^2$ *в случае* $l = 0$ *понимается число* m.

Следствие 1 *Условные плотности обобщенного распределения* Δ^2 $p_{n-k}(x_{n-k}|x_1, \ldots, x_{n-k-1})$, $k = \overline{0, n-1}$ *имеют вид*

$$p_{n-k}(x_{n-k}|x_1, \ldots, x_{n-k-1}) = \frac{\sum\limits_{l=a_k}^{b_k} C_k^{b_k-l} \sum\limits_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_l \le n-k \\ 1 \le j_1 < \ldots < j_l \le m}} \left(\det \left|\left|\varphi_{j_p}(x_{i_q})\right|\right|_{p,q=1}^{l}\right)^2}{\sum\limits_{l=a_{k+1}}^{b_{k+1}} C_{k+1}^{b_{k+1}-l} \sum\limits_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_l \le n-k-1 \\ 1 \le j_1 < \ldots < j_l \le m}} \left(\det \left|\left|\varphi_{j_p}(x_{i_q})\right|\right|_{p,q=1}^{l}\right)^2}$$

В §2 построена модификация Алгоритма 1 для моделирования обобщенного распределения Δ^2. Доказано, что его трудоемкость не может превосходить величину

$$C_{gen} = \left(O(n^2) + O(n^2 2^n) C_m^{[\frac{m}{2}]} + n \log_2 C_m^{[\frac{m}{2}]}\right) C_\varphi^{(n)}$$

В §3 исследован вопрос о погрешности полученного приближения и проведено сравнение с равномерным случайным поиском. Вероятность попадания в ε-окрестность точного D-оптимального плана при равномерном поиске не превосходит $\frac{1}{\mu^s(X)} \frac{(\varepsilon\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ и, тем самым, обратно пропорциональна мере множества планирования. В свою очередь, вероятность попадания моды выборки из генеральной совокупности с распределением $\Delta^2_{n,m}$ в ту же окрестность не превосходит $\max \Delta^2_{n,m}(Q) \frac{(\varepsilon\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, что позволяет находить эффективно D-оптимальные планы при больших значениях $\max \Delta^2_{n,m}(Q)$.

В §4 сделано замечание о моделировании в области сложного вида. Если множество планирования имеет сложную структуру, мы окружаем его другим, в котором можно построить ортонормированную систему функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Затем ищем D-оптимальный план в большей области и проверяем его принадлежность начальному множеству.

В заключительном §5 Главы 4 приведено множество примеров нахождения точных D-оптимальных планов с помощью обобщенного распределения Δ^2. Особый интерес представляет найденный впервые точный D-оптимальный план в двумерной области при рассмотрении квадратичной полиномиальной регрессии.

Основные результаты и выводы работы.

1. Построен эффективный алгоритм моделирования распределений Δ^2, в непрерывном и дискретном вариантах, и обобщенного Δ^2 в самых общих предположениях. В каждом из трех случаев показано преимущество построенного алгоритма по сравнению с предложенными до этого в литературе. Реализованы программы моделирования всех трех указанных распределений.

2. Подробно рассмотрено моделирование по отношению к дискретной мере, что позволило разделение систематической от случайной ошибки в регрессионных моделях. В работах других авторов вычислительная трудность моделирования не позволяла составить эффективную процедуру.

3. Результаты моделирования обобщены на случай, когда число точек n больше числа функций m, что часто случается в регрессионном анализе. Установлена связь между D-оптимальными планами и максимум выборки из генеральной совокупности, имеющей обобщенное распределение Δ^2, причем оценено приближение полученного решения к истинному. Построена модификация случайного поиска, которая позволяет в ряде случаев с большой точностью решать трудную задачу нахождения D-оптимальных планов.

4. Приведены содержательные примеры, иллюстрирующие преимущества использования распределения Δ^2 в ряде частных случаях. Построен D-оптимальный план для квадратичной регрессии в двумерном гиперкубе.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Ермаков С.М., Мисов Т.И., *Моделирование Δ^2-распределения*,

Вестник С.-Петербурского у-та, Серия 1, Вып. 4, Изд-во СПбГУ, 2005, с. 53-61.

2. Ермаков С.М., Мисов Т.И. *О методах типа "ресемплинг" в регрессионном анализе*, Математические модели. Теория и приложения, Вып. 6, СПб.:ВВМ, 2005, с. 27-36.

3. Missov T.I., Ermakov S.M., *Simulation of the* Δ^2*-distribution*, Proceedings of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulation, 2005, pp. 499-503.

4. Missov T.I., *Integral Evaluation Using the* Δ^2*-distribution. Simulation and Illustration*, Monte Carlo Methods and Applications, Vol. 13, No. 2 (2007), pp. 219-225.