Рисунок 9.1.
Сравнение погрешностей метода Монте-Карло, обычного Квази Монте-Карло и модифицированного Квази Монте-Карло для системы уравнений на сетке.

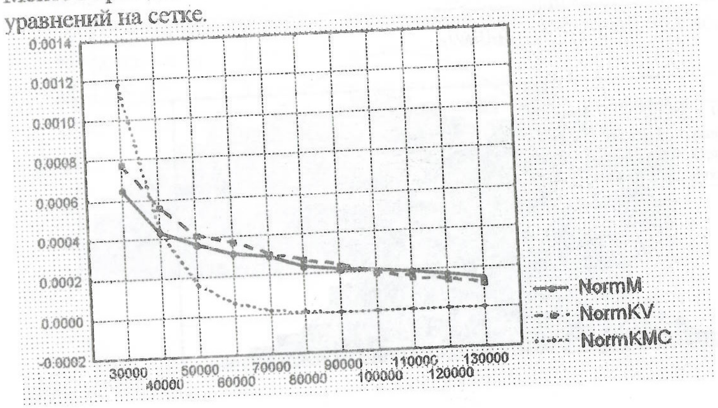
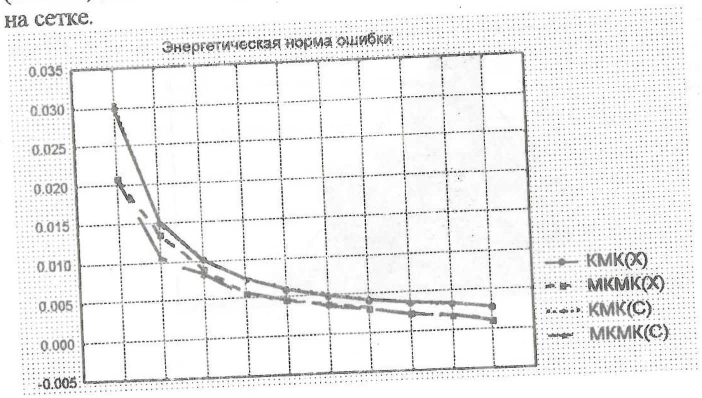


Рисунок 9.2
Сравнение погрешностей метода КМК (Холтон), КМК (Соболь), МКМК (Холтон), и МКМК (Соболь) для системы уравнений на сетке.



УДК 519.21

С.М. Ермаков, Т.И. Мисов

О МЕТОДАХ ТИПА "РЕСЕМПЛИНГ" В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ

В регрессионных задачах важное место занимает проблема оценки систематической погрешности (адекватность модели). Общим методом ее решения является метод повторной выборки (ресемплинг). Мы рассмотрим подход (предложенный Ермаковым и Швабе), основанный на случайной выборке данных с помощью распределения Δ^2. В работе изучаются различные методы моделирования дискретного распределения Δ^2 и проводится сравнительный анализ их использования в зависимости от параметров модели.

Известно, что в регрессионных задачах важное место занимает проблема оценки систематической погрешности (адекватность модели). Общим методом решения этих проблем является метод повторной выборки ("ресемплинг"). Мы рассмотрим подход, предложенный в работе [4] и основанный на случайной выборке данных с помощью Δ^2-распределения.

Рассматривается линейная регрессионная модель вида

$$\xi_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \qquad i = \overline{1, N},$$

где измерения производятся в точках $\{x_i\}_{i=1}^N \in X$, а относительно погрешностей $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$ вводятся стандартные предположения:

$$E\varepsilon_i = 0; \qquad E\varepsilon_i^2 = \sigma^2; \qquad cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0,\ i \neq j$$

Рассмотрим дискретную меру μ, сосредоточенную с одинаковым весом в точках $\{x_i\}_{i=1}^N$, т.е. $\mu(x_1) = \ldots = \mu(x_N) = \frac{1}{N}$.

Аппроксимируем f линейной комбинацией $\sum_{i=1}^m c_i\varphi_i$, где $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ линейно независимы на носителе меры μ. Тогда оценки метода наименьших квадратов $\widehat{c_i}$ коэффициентов c_i имеют вид ([4], с.3)

$$\widehat{c_i} = \frac{det\,||(\varphi_1, \varphi_j), \ldots, (\varphi_{i-1}, \varphi_j), (\xi, \varphi_j), (\varphi_{i+1}, \varphi_j), \ldots, (\varphi_m, \varphi_j)||_{j=1}^m}{det\,||(\varphi_k, \varphi_l)||_{k,l=1}^m},$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05.01.00865-а) и гранта Президента РФ "Ведущие Научные Школы" НШ 2268.2003.1

где $(\varphi_k, \varphi_l) = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} \varphi_k(x_r)\varphi_l(x_r)$, а $(\xi, \varphi_k) = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} \xi_r \varphi_k(x_r)$.

Если система функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ ортонормирована, то

$$\widehat{c_i} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} \xi_r \varphi_i(x_r)$$

Воспользовавшись теоремой Бине-Коши приходим к соотношению

$$\widehat{c_i} = \frac{\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_m\le N} \Delta_i(\xi, i_1, \ldots, i_m)\Delta(i_1, \ldots, i_m)}{\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_m\le N} \Delta^2(i_1, \ldots, i_m)},$$

где
$\Delta_i(\xi, i_1, \ldots, i_m) = \det \left|\left|\varphi_1(x_{i_j}), \ldots, \varphi_{i-1}(x_{i_j}), \xi_{i_j}, \varphi_{i+1}(x_{i_j}), \ldots, \varphi_m(x_{i_j})\right|\right|$, $j = \overline{1,m}$, а $\Delta(i_1, \ldots, i_m) = \det ||\varphi_j(x_{i_k})||_{j,k=1}^m$.

Введем в точках $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ вероятностное распределение с плотностью

$$p(i_1, \ldots, i_m) = \frac{\Delta^2(i_1, \ldots, i_m)}{\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_m\le N} \Delta^2(i_1, \ldots, i_m)} \tag{1}$$

Это распределение называется *дискретным Δ^2-распределением* (относительно меры $\mu^m = \otimes_{k=1}^m \mu$). Тогда случайная величина, определяемая соотношением

$$\chi_i = \chi_i(i_1, \ldots, i_m) = \frac{\Delta_i(\xi, i_1, \ldots, i_m)}{\Delta(i_1, \ldots, i_m)},$$

является несмещенной оценкой $\widehat{c_i}$, т.е. $E\chi_i = \widehat{c_i}$.

В статье [4] доказана некоррелированость величин χ_i и сосчитана их дисперсия. К тому же указан способ разделения случайной ошибки от систематической с помощью этих случайных величин.

1 Моделирование дискретного Δ^2-распределения

Использование дискретного Δ^2-распределения в задачах регрессионного анализа требует его моделирования. К этому вопросу можно подойти по-разному. С одной стороны применим метод обращения, который часто в случае моделирования дискретных распределений является предпочтительным. Однако из-за специфического вида плотности $p(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ – она содержит определители m-ого порядка – применение метода обращения приводит к громоздким выкладкам. Этот вопрос исследован в [4]. Поэтому возникает идея применить метод отбора (в чистом виде) или предложенный в работах [3] и [5] (при исследовании вопроса о моделировании непрерывного распределения Δ^2) "метод условных плотностей", вычислить их трудоемкости и сравнить их с той, которая возникает при использовании метода обращения.

2 Метод обращения

Имеем дискретное распределение

$$\left\{ \begin{matrix} (i_1, i_2, \ldots, i_m) \\ p(i_1, i_2, \ldots, i_m) \end{matrix} \right\}_{1\le i_1<\ldots<i_m\le N},$$

для моделирования которого методом обращения нужно иметь в качестве входных данных, все C_N^m комбинаций $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ и соответствующие им вероятности $p(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le N$. Заметим, что для вычисления всех вероятностей нужно сосчитать C_N^m определителей m-ого порядка, что является весьма трудоемкой процедурой.

Лемма 2.1 *Трудоемкость моделирования дискретного Δ^2-распределения методом обращения не превосходит*

$$C_{inv} = \left(m - 1 + mNC_\varphi + C_N^m \frac{2m^3 + m + 6}{3}\right) + \log_2 C_N^m, \tag{2}$$

где C_φ - средняя трудоемкость моделирования любой из функций φ_i в какой бы ни было точке x_j, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,N}$.

Замечание 2.1 Если требуется промоделировать R векторов с Δ^2-распределением, то трудоемкость этой процедуры не будет превышать

$$C_{inv} = \left(m - 1 + mNC_\varphi + C_N^m \frac{2m^3 + m + 6}{3}\right) + R\log_2 C_N^m.$$

Доказательство: Слагаемое $\log_2 C_N^m$ в (2) обусловленно применением метода обратной функции. Известно, что если моделировать дискретное распределение, например, дихотомией, то его трудоемкость есть двоичный логарифм от объема распределения.

Как хорошо известно (см. напр. [3]), трудоемкость вычисления квадрата определителя m-ого порядка не превосходит (а в случае, когда в нем нет ни одного нулевого элемента, и равна) $\frac{2m^3+m+3}{3}$.

К тому же, при вычислении вероятностей $p(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le N$ нужно совершить $m-1$ сложений в знаменателе и C_N^m делений.

Наконец, на вычисление функций $\varphi_i(x_j)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,N}$ отводится mNC_φ операций. Лемма доказана.

Как видно из (2), наибольший вклад в общую трудоемкость метода обращения вносит член $C_N^m \frac{2m^3+m+6}{3}$, связанный с вычислением C_N^m определителей m-ого порядка. Во избежание этой неприятной процедуры возникает идея об исследовании моделирования Δ^2-распределения другими методами.

3 Использование метода отбора

Использование метода отбора при моделировании Δ^2-распределения помогает избежать процедуру вычисления всех C_N^m определителей m-ого порядка. Недостаток этого метода применительно к дискретным распределениям состоит в том, что его трудоемкость большая: она является оценкой сверху производной Радона-Никодима исходного распределения по отношению к некоторому вспомогательному. Проблема заключается в том, что для дискретных распределений "хорошего", т.е. такого, что производная Радона-Никодима близка к единице, вспомогательного распределения не найти. Поэтому высказывание, что в общем случае метод отбора менее трудоемкий, чем метод обращения применительно к нашей задаче, будет неточным.

Укажем процедуру моделирования Δ^2-распределения методом отбора и сосчитаем ее трудоемкость.

Алгоритм 3.1 Моделирование дискретного Δ^2 методом отбора

1) Получаем значение α_1 с помощью генератора случайных чисел $(0 \le \alpha_1 \le 1)$. Присваиваем $i_1 \longleftarrow \lceil N * \alpha_1 \rceil$, $i_1 \in \{1, \ldots, N\}$.

2) Пусть заданы натуральные числа $k = 2$ и $j = 2$. Пока $j \le m$, выполняется:

а) Получаем значение α_k с помощью генератора случайных чисел $(0 \le \alpha_k \le 1)$.

б) Если $\lceil N * \alpha_k \rceil \ne \{i_1, \ldots i_{j-1}\}$, то полагаем $i_j = \lceil N * \alpha_k \rceil$, $j \longleftarrow j+1$, $k \longleftarrow k+1$.

Возвращаемся к 2) (проверяем условие выполнения цикла).

в) В противном случае полагаем $k \longleftarrow k+1$ и возвращаемся к а).

С помощью первых двух шагов алгоритма мы получаем набор $(i_1, \ldots, i_m)$, $i_j \in 1, \ldots, N$, $i_j \ne i_l$, $j \ne l$. Сосчитаем трудоемкость получения этого набора (она зависит от количества α_k, которые получаем с помощью генератора случайных чисел). Условимся, что на вычисление $\lceil \cdot \rceil$ отводится 0 операций. Поскольку α_k - реализации равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$, то $\lceil N\alpha_k \rceil$ принимает с одинаковой вероятностью $\frac{1}{N}$ каждое из значений $1, \ldots, N$. Поэтому, для получения i_j необходимо сгенерировать в среднем $\frac{N}{N-j+1}$ штук α_k-ых, поскольку вероятность того, чтобы i_j не совпало с уже полученными до этого $i_1, \ldots, i_{j-1}$ равна $\frac{N-j+1}{N}$. Осталось еще упорядочить набор $i_1, \ldots, i_m$ по возрастанию элементов. Для этого, если использовать в качестве сортировки метод пузырька, понадобится совершить $\log_2 m$ операций. Итого, трудоемкость получения набора $(i_1, \ldots, i_m)$ равна

$$2\frac{N^m}{N(N-1)\ldots(N-m+1)} + \log_2 m = 2\frac{N^m(N-m)!}{N!} + \log_2 m$$

Коэффициент 2 появляется за счет того, что при каждом получении α_k мы совершаем умножение $N\alpha_k$.

3) Вычисляем значения каждой из функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ в точках $(i_1, \ldots, i_m)$. Для этого нужно совершить $m^2 C_\varphi$ операций, где C_φ определяется так же как и выше. Находим $MAX = \max\limits_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,N}} |\varphi_i(x_j)|$. Вычисляем $\Delta^2(i_1, \ldots, i_m)$ для полученного нами набора. Согласно неравенству Адамара

$$\Delta^2(i_1, \ldots, i_m) \le m^m (MAX)^{2m} =: M$$

4) Проводим сам отбор. Получаем значение β с помощью генератора случайных чисел $(0 \le \beta \le 1)$. Если $\Delta^2(i_1, \ldots, i_m) > M\beta$, процедура заканчивается, т.е. мы промоделировали вектор с Δ^2-распределением. В противном случае повторяем 4).

Напомним, что M указывает сколько в среднем определителей m-ого порядка нужно сосчитать для того, чтобы промоделировать один вектор с Δ^2-распределением. Как уже упоминалось, трудоемкость вычисления одного из них не превосходит $\frac{2m^3+m+3}{3}$. Наконец, напоминая, что на вычисление функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ в точках $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ нужно совершить $m^2 C_\varphi$ операций, мы приходим к следующему утверждению:

Лемма 3.1 *Трудоемкость моделирования дискретного Δ^2-распределения методом отбора C_{rej} не превосходит*

$$(\sqrt{m}MAX)^{2m}\left(\frac{2m^3+m+3}{3}+m^2C_\varphi+2\frac{N^m(N-m)!}{N!}+\log_2 m\right) \qquad (3)$$

4 Использование условных плотностей

Для непрерывного Δ^2-распределения (см. [3]) использование условных плотностей вместо чистого метода отбора заметно уменьшает трудоемкость. Рассмотрим его модификацию в дискретном случае, сосчитаем его трудоемкость и сравним при каких значениях трех параметров N (число точек, в которых сосредоточена дискретная мера μ), m (количество ортонормированных функций) и R (число репликаций, т.е. число векторов с Δ^2-распределением, которые мы моделируем) стоит им пользоваться, т.е. в каких случаях мы выигрываем в трудоемкости по сравнению с чистым отбором и методом обращения.

Напомним, что "метод условных плотностей"(см. [3]) основан на том, что вместо того, чтобы моделировать само Δ^2, мы моделируем каждую из условных плотностей в разложении Δ^2 по формуле условной вероятности. Укажем сначала вид безусловных плотностей.

Лемма 4.1 *Безусловная плотность s-ого порядка ($s=\overline{1,m}$)*

$$p(i_1,\ldots,i_s)=\int_X p(i_1,\ldots,i_m)\mu(dx_{s+1})\ldots\mu(dx_m) \qquad (4)$$

имеет вид

$$p(i_1,\ldots,i_s)=\frac{(m-s)!}{m!\,N^m}\sum_{1\le k_1<\ldots<k_s\le m}\Delta^2_{k_1\ldots k_s}(i_1,\ldots,i_s),$$

где $\Delta_{k_1\ldots k_s}(i_1,\ldots,i_s)=\det\|\varphi_{k_1}(x_{i_l}),\ldots,\varphi_{k_s}(x_{i_l})\|_{l=1}^{s}$.

Доказательство: Согласно лемме [2], с.194:

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le N}\Delta^2(i_1,i_2,\ldots,i_m)=m!\,N^m\det\left\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i)\right\|_{k,l=1}^{m}$$

Поскольку функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ ортонормированы в $L^2(X,\mu)$, последний определитель равен единице и, следовательно,

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le N}\Delta^2(i_1,i_2,\ldots,i_m)=m!\,N^m.$$

Заметим, что в силу дискретного характера меры μ (4) перепишется в виде

$$p(i_1,\ldots,i_s)=\frac{1}{N^{m-s}}\sum_{i_{s+1}=1}^{N}\ldots\sum_{i_m=1}^{N}p(i_1,\ldots,i_m)=$$

$$=\frac{1}{N^{m-s}}\sum_{i_{s+1}=1}^{N}\ldots\sum_{i_m=1}^{N}\frac{\Delta^2(i_1,\ldots,i_m)}{m!\,N^m}. \qquad (5)$$

Рассмотрим

$$\sum_{i_m=1}^{N}\Delta^2(i_1,\ldots,i_m)=\sum_{i_m=1}^{N}\left((-1)^{m+i_m}\sum_{j_1=1}^{m}\varphi_{j_1}(x_{i_m})\Delta_{(j_1)}(i_1,\ldots,i_{m-1})\right)^2,$$

где
$\Delta_{(j_1)}(i_1,\ldots,i_{m-1})=\det\|\varphi_1(x_{i_l}),\ldots,\varphi_{j_1-1}(x_{i_l}),\varphi_{j_1+1}(x_{i_l}),\ldots,\varphi_m(x_{i_l})\|_{l=1}^{m-1}$.

В силу ортонормированности системы $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ на $L^2(X,\mu)$, т.е.

$$\frac{1}{N}\sum_{i_m=1}^{N}\varphi_k^2(x_{i_m})=1\,, \qquad k=\overline{1,m},$$

получаем

$$\sum_{i_m=1}^{N}\Delta^2(i_1,\ldots,i_m)=N\sum_{j_1=1}^{m}\Delta^2_{(j_1)}(i_1,\ldots,i_{m-1})$$

Далее

$$\sum_{i_{m-1}=1}^{N}\sum_{i_m=1}^{N}\Delta^2(i_1,\ldots,i_m)=$$

$$=N\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{i_{m-1}=1}^{N}\left((-1)^{m-1+i_{m-1}}\sum_{j_2=1}^{m-1}\varphi_{j_2}(x_{i_{m-1}})\Delta_{(j_1,j_2)}(i_1,\ldots,i_{m-2})\right)^2,$$

т.е.

$$\sum_{i_{m-1}=1}^{N}\sum_{i_m=1}^{N}\Delta^2(i_1,\ldots,i_m)=2N^2\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{m-1}\Delta^2_{(j_1,j_2)}(i_1,\ldots,i_{m-2}),$$

где $\Delta_{(j_1,j_2)}(i_1,\ldots,i_{m-2})$ получается из $\Delta(i_1,\ldots,i_m)$ вычеркиванием последних двух строк и столбцов с номерами j_1 и j_2. Множитель 2 возникает в силу того, что в верхней сумме возникает $m(m-1)$ слагаемых, содержащих всевозможные определители $(m-2)$-ого порядка (всего определителей $(m-2)$-ого порядка $C_m^{m-2}=\frac{1}{2}m(m-1)$ и каждый из них встречается в сумме 2 раза).

Рассуждая тем же самым образом относительно остальных сумм в (5), получим

$$\sum_{i_{s+1}=1}^{N}\cdots\sum_{i_m=1}^{N}\Delta^2(i_1,\ldots,i_m)=(m-s)!\,N^{m-s}\sum_{1\le j_1<\ldots<j_{m-s}\le m}\Delta^2_{(j_1\ldots j_{m-s})}(i_1,\ldots,i_s),$$

где $\Delta^2_{(j_1\ldots j_{m-s})}(i_1,\ldots,i_s)$ получается из $\Delta^2(i_1\ldots i_m)$ вычеркиванием последних s строк и столбцов с номерами $j_1,\ldots,j_{m-s}$. Осталось обозначить дополнение индексов $(j_1,\ldots,j_{m-s})$ до $(1,\ldots,m)$ через $(k_1,\ldots,k_s)$. Лемма доказана.

Следствие 4.1 *Условная плотность s-ого порядка $p(i_s|i_1\ldots i_{s-1})$, $s=\overline{2,m}$, имеет вид*

$$p(i_s|i_1\ldots i_{s-1})=\frac{\sum\limits_{1\le k_1<\ldots<k_s\le m}\Delta^2_{k_1\ldots k_s}(i_1,\ldots,i_s)}{(m-s+1)\sum\limits_{1\le j_1<\ldots<j_{s-1}\le m}\Delta^2_{j_1\ldots j_{s-1}}(i_1,\ldots,i_{s-1})}$$

Доказательство: Нужно лишь представить условную плотность в виде отношения двух безусловных

$$p(i_s|i_1\ldots i_{s-1})=\frac{p(i_1,\ldots,i_s)}{p(i_1,\ldots,i_{s-1})}$$

и сослаться на лемму 4.1. Следствие доказано.

Поскольку условные плотности в дискретном случае имеют абсолютно тот же вид, что и в непрерывном случае (см. [3]), они тем же самым образом представимы в виде смеси распределений с коэффициентами, считающимися итеративным образом. Поэтому и трудоемкость

моделирования в этом случае C_{cond} не будет превосходить сосчитанной в [3] величины

$$\mathrm{MAX}^2\left(\frac{C_\varphi+2}{2}m^2-\frac{C_\varphi+8}{2}m-3+(m+4)2^{m-1}+\log_2\prod_{k=2}^{m-1}C_m^k+\log_2 C_N^m\right)\qquad(6)$$

5 Сравнение трудоемкостей указанных методов

Сравним полученные трудоемкости (2), (3) и (6) методов обращения, отбора и условных плотностей соответственно. Напомним, что это сравнение ведется в зависимости от значений трех параметров модели – N (числа точек, в которых сосредоточена дискретная мера μ), m (количества ортонормированных функций) и R (числа репликаций).

Заметим, что в (2) определяющим является член $C_N^m\frac{2m^3+m+6}{3}$, в (3) – это m^m, а в (6) – $(m+4)2^{m-1}$. Таким образом, с ростом N (при фиксированном m) трудоемкость метода обращения заметно возрастает, в отличии от трудоемкостей методов отбора и условных плотностей, которые слабо зависят от N. Так, например, при $m=5$, $R=1$ и $C_\varphi=10$ методом обращения выгоднее пользоваться (по сравнению с методом отбора) до $N=19$. Если же $m=10$, $R=1$, а $C_\varphi=10$, то обращением стоит пользоваться до $N=54$. Эти результаты получены в предположении, что мы не учитываем множитель MAX^{2m} в (3). В обоих случаях, однако, наименьшее количество операций совершается при использовании условных плотностей.

С ростом N использование метода отбора предпочтительнее методу обращения.

Например, при $N=1000$, $m=5$, $R=1$ и $C_\varphi=10$: $C_{inv}=O(10^{11})$, а $C_{rej}=O(10^6)$. Этого и следовало ожидать, поскольку при "больших" N дискретная модель аппроксимирует непрерывную, в которой и используется отбор (в той или иной форме). Стоит отметить, что в этом же случае $C_{cond}\approx 302$. Это и иллюстрирует огромное преимущество использования условных плотностей при больших N и R.

Список литературы

[1] **Ермаков, С.М., Золотухин, В.Г.** Полиномиальные приближения и метод Монте-Карло // Теория вероятностей и ее применения (1960) 5, №4, с.473-475.

[2] **Ермаков, С.М.** Метод Монте-Карло и смежные вопросы // "Наука", М., 1971, 327с.

[3] **Ермаков, С.М., Мисов, Т.И.** Моделирование Δ^2-распределения // Вестник СПбГУ, Вып.3, Изд. СПбГУ, 2005

[4] **Ermakov, S.M., Schwabe, R.** On Randomizing Estimators in Linear Regression Models // Freie Universitaet Berlin Verlag, Serie A - Mathematik, 1999, 10p.

[5] **Missov, T.I., Ermakov, S.M.** Simulation of the Δ^2-Distribution // Proceedings of the Fifth Workshop on Simulation, NII Chemistry Saint Petersburg University Publishers, 2005, pp.499-502.

УДК 519.24

В. Б. Мелас, А. Н. Пепелышев

ИССЛЕДОВАНИЕ МАКСИМИННО-ЭФФЕКТИВНЫХ ПЛАНОВ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПОДХОДА

В настоящей работе рассматриваются нелинейные регрессионные модели в виде линейных комбинаций экспонент с неизвестными показателями. Предполагается, что для нелинейно входящих параметров заданы априорные интервалы возможных значений. На основе функционального подхода, введенного в работе (Melas, 1978), максиминно эффективные D-оптимальные планы построены и исследованы. Этот подход позволяет представить опорные точки планов, рассматриваемые как функции длины априорных интервалов, с помощью рядов Тейлора.

1 Введение

Целью настоящей работы является применение функционального подхода, развитого в работах (Melas, 1978, 2005; Dette, Melas, Pepelyshev, 2004) и ряде других, к построению и исследованию максиминно эффективных D-оптимальных планов для нелинейных регрессионных моделей. Здесь мы рассматриваем класс моделей, задаваемых в виде линейной комбинации экспонент с неизвестными показателями. Однако, подход применим и к более широкому классу моделей, в частности, к моделям, описанным в работе (Melas, 2005).

Основной чертой нелинейных моделей является зависимость информационной матрицы от неизвестных параметров. Для преодоления этой трудности часто используют локально-оптимальный подход, введенный в работе (Chernoff, 1953). Идея этого подхода состоит в использовании начальных приближений параметров для построения критерия оптимальности. Планы, которые являются локально D-оптимальными в классе планов с минимальной поддержкой для экспоненциальных моделей были подробно изучены в работе (Melas, 1978). Такие планы обычно оказываются локально D-оптимальными в классе всех непрерывных планов. Было доказано, что опорные точки этих планов являются аналитическими функциями нелинейных параметров. В работе (Melas, 2005) для этих функций построены представления в виде степен-

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант N 04-01-00519) и ВНП Минобразования (п.3.1 N 4733).